VŠB – Technická univerzita Ostrava
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Katedra aplikované matematiky

Testování hypotéz
Hypothesis testing

2013 Pavel Kuzma

VŠB - Technická univerzita Ostrava
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Katedra aplikované matematiky

Zadání bakalářské práce

Student: **Pavel Kuzma**

Studijní program: B2647 Informační a komunikační technologie

Studijní obor: 1103R031 Výpočetní matematika

Téma: Testování hypotéz
Hypothesis testing

Zásady pro vypracování:

Bakalářská práce bude obsahovat stručný úvod do teorie pravděpodobnosti a statistiky nutný k objasnění principu statistického testování hypotéz i samotnou myšlenku testování jako analogii s metodou důkazu sporem. Dále zde budou popsány nejčastěji používané statistické testy teoreticky i na příkladech.
Thesis will include a brief introduction to probability theory and statistics necessary to clarify the principle of statistical hypothesis testing, and the very idea of testing as an analogy with the method of proof reductio ad absurdum. There will be described most commonly used statistical tests in theory and examples.

Seznam doporučené odborné literatury:

Anděl, J. (2007), Statistické metody, MATFYZPRESS, Praha 2007, ISBN 80-7378-003-8

Anděl, J. (2002), Základy matematické statistiky, Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta, Preprint.

Litschmannová, M. (2011): Vybrané kapitoly z pravděpodobnosti, elektronická skripta, dostupné z: http://mi21.vsb.cz/modul/vybrane-kapitoly-z-pravdepodobnosti

Litschmannová, M. (2011), Úvod do statistiky, elektronická skripta, dostupné z: http://mi21.vsb.cz/modul/uvod-do-statistiky

Formální náležitosti a rozsah bakalářské práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

Vedoucí bakalářské práce: **RNDr. Pavel Jahoda, Ph.D.**

Datum zadání: 16.11.2012
Datum odevzdání: 07.05.2013

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ - TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
fakulta elektrotechniky a informatiky
1
OSTRAVA

doc. RNDr. Jiří Bouchala, Ph.D.
vedoucí katedry

prof. RNDr. Václav Snášel, CSc.
děkan fakulty

Souhlasím se zveřejněním této bakalářské práce dle požadavků čl. 26, odst. 9 *Studijního a zkušebního řádu pro studium v bakalářských programech VŠB-TU Ostrava*.

V Ostravě 1. dubna 2013 ....

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně. Uvedl jsem všechny literární prameny a publikace, ze kterých jsem čerpal.

V Ostravě 1. dubna 2013 ....

Rád bych na tomto místě poděkoval všem, kteří mi s prací pomohli, protože bez nich by tato práce nevznikla.

Abstrakt

Bakalářská práce bude obsahovat stručný úvod do teorie pravděpodobnosti a statistiky nutný k objasnění principu statistického testování hypotéz i samotnou myšlenku testování jako analogii s metodou důkazu sporem . Dále zde budou popsány nejčastěji používané statistické testy teoreticky i na příkladech.

Klíčová slova: Testování hypotéz, jednovýběrové testy, dvouvýběrové testy, testy dobré shody

Abstract

Thesis will include a brief introduction to probability theory and statistics necessary to clarify the principle of statistical hypothesis testing, and the very idea of testing as an analogy with the method of proof reductio ad absurdum. There will be described most commonly used statistical tests in theory and examples.

Keywords: Hypothesis testing, one sample tests, two-sample tests, chi-squared tests

Obsah

Seznam výpisů zdrojového kódu

1 Úvod

V této bakalářské práci jsem se zabýval testováním hypotéz, což je úloha matematické statisiky, která umožňuje posoudit, zda získaná data odpovídají předpokladu, který jsme učinili před provedením testu.

Mým cílem bylo vytvořit práci, která by poskytovala přehled testů probíráných v kurzu statistiky a u každého z těchto testů uvést jejich konstrukci společně s názornými příklady.

Druhým cílem bylo naprogramování těchto testů v Matlabu a ukázat výpočet některých z vypočítaných příkladů také v tomto prostředí.

2 Úvod do problematiky

2.1 Náhodná veličina, distribuční funkce

Náhodná veličina je výsledek náhodního pokusu, který je dán reálným číslem. Rozdělujeme ji na diskrétní a spojitou náhodnou veličinu.

Definice pravděpodobnosti:

Definice 2.1 *Nechť Ω je množina. Nazveme ji* prostorem elementárních jevů *a její prvky nazýváme* elementárními jevy*. Dále nechť $\mathcal{A}$ je systém podmnožin množiny Ω, nazveme jej σ -* algebrou jevů*, splňující podmínky*

- *Jestliže $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, potom $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$,*
- *Jestliže $A \in \mathcal{A}$, potom $\Omega - A \in \mathcal{A}$.*

Pravděpodobností na prostoru elementárních jevů Ω se σ - algebrou jevů $\mathcal{A}$ nazveme zobrazení $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ splňující podmínky

- *Pro každé $A \in \mathcal{A}$ platí $P(A) \geq 0$,*
- *$P(\Omega) = 1$,*
- *Jestliže $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ jsou po dvou disjunktní množiny, potom $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.*

Uspořádanou trojici $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ nazveme pravděpodobnostním prostorem.

Definice náhodné veličiny:

Definice 2.2 *Mějme pravděpodobnostní prostor (Ω,S,P). Náhodná veličina X je reálná funkce X(ω) prvků $\omega \in \Omega$ ze základního prostoru taková, že pro každé reálné x (x $\in$ R) je množina $\{\omega \in \Omega | X(\omega) < x\} \in S$, tj. náhodným jevem. Tedy náhodná veličina je zobrazení X: $\Omega \to R$ takové, že pro kazdé x $\in$ R platí:*

$$X^{-1}((-\infty, x)) = \{\omega \in \Omega | X(\omega) < z\} \in S$$

Distribuční funkce

Definice 2.3 *Distribuční funkcí náhodné veličiny X nazveme funkci F:R-¿R, která je pro každé t $\in \mathbb{R}$ dána předpisem:*

$F(t) = P\{X \in (-\infty, t)\} = P(X < t)$

Distribuční funkce je funkce, která každému reálnému číslu přiřazuje pravděpodobnost, že náhodná veličina nabude hodnoty menší než toho číslo a má tyto vlastnosti:

1. Distribuční funkce je nezáporné číslo menší nebo rovno jedné
2. Je neklesající
3. Je zleva spojitá
4. $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$; $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$
5. $\forall a, b \in R; a < b : P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$
6. $P(X = x_0) = \lim_{x\to x_0+} F(x) - F(x_0)$

Distribuční funkce spojité náhodné veličiny:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

f(x) se nazývá hustota pravděpodobnosti a je definována jako

$$f(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{P(x < X < x+\Delta x)}{\Delta x}$$

Jestliže tedy známe hustotu pravděpodobnosti můžeme spočítat distribuční funkci a naopak.

Distribuční funkci diskrétní náhodné veličiny můžeme určit pomocí pravděpodobnostní funkce

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i)$$

kde P(X = x_i) je hodnota pravděpodobnostní funkce P v bodě x_i (P(x_i) = P(X=x_i)).

2.2 Nulová a alternativní hypotéza

Pro testování hypotéz se používá celá řada testů, které můžeme rozdělit do dvou skupin na parametrické a neparametrické testy. Parametrické testy jsou takové, které předpokládají konkrétní rozdělení populace (normální, binomické,...). Za neparametrické testy označujeme testy při kterých nemusíme specifikovat rozdělení populace.

Testování hypotéz je rozhodovací proces při kterém proti sobě stojí dvě tvrzení (nulová a alternativní hypotéza). Nulová hypotéza H_0 je hypotéza, kterou se při testování snažíme zamítnout ve prospěch alternativní hypotézy, která je s ní ve sporu. Nulová hypotéza je považována za pravdivou až do doby, kdy nás informace z výběrového souboru přesvědčí o opaku. Značí se rovností mezi testovaným parametrem a hodnotou kterou očekáváme

U parametrických testů má nulová hypotéza tento tvar:
$H_0 : \theta = \theta_0$

Alternativní hypotéza H_A je tvrzení, které popírá nulovou hypotézu. Může být v jednom ze čtyř tvarů:

$\mathrm{H}_A : \theta = \theta_1$
$\mathrm{H}_A : \theta \neq \theta_0$
$\mathrm{H}_A : \theta < \theta_0$
$\mathrm{H}_A : \theta > \theta_0$

2.3 Chyba I. a II. druhu

Při testování se dopouštíme chyb, které se označují jako chyba I. a II. druhu. Chyby I. druhu se dopouštíme v případě že nulová hypotéza H_0 je platná a my ji přesto zamítneme. Pravděpodobnost, že k této chybě dojde se značí α a nazývá se hladina významnosti. Chyba II. druhu je chyba, která vzniká v případě, že je platná alternativní hypotéza ale my přesto nulovou hypotézu nezamítneme. Tato chyba se značí β.

2.4 Testování hypotéz jakožto statistická analogie důkazu sporem

Označení:
A, B, C, ... velkými tiskacími písmeny označujeme výroky respektive jevy
P*(**A**) .... pravdivostní hodnota výroku **A**,

P*(**A**) = 1 $\Leftrightarrow$ **A** je pravdivý výrok P*(**A**) = 0 $\Leftrightarrow$ **A** je nepravdivý výrok

P(**A**) .... pravděpodobnost, že nastane jev **A** , tzn. pravděpodobnost, že platí P*(**A**) = 1

Poznámka: Vidíme, že tvrzení P*(**A**) = 1 je limitním případem tvrzení P(**A**) = p. pro p $\rightarrow$ 1. Tzn. P*(**A**) = 1 $\Leftrightarrow$ P(**A**) = 1.

1) Klasický důkaz sporem:

a) Chceme dokázat, že neplatí výrok $\mathbf{H}_0$, tzn. P*($\mathbf{H}_0$) = 0.

b) Předpokládáme platnost výroku $\mathbf{H}_0$ a dále logicky odvodíme výrok **A** který, je s ním ve sporu. tzn. platí :

P*($\mathbf{H}_0 \Rightarrow$ **A**) = 1.
ale zároveň
P*($\mathbf{H}_0 \wedge$ **A**) = 0.

Pomocí pravdivostních tabulek bychom se snadno přesvědčili, že tato situace nastane pouze v případě , kdy P*($\mathbf{H}_0$) = 0.

2) Statistické testování hypotéz:

a) Chceme dokázat, že s největší pravděpodobností neplatí výrok $\mathbf{H}_0$, tzn. P($\mathbf{H}_0$) $\rightarrow$ 0.

b) Předpokládáme platnost výroku $\mathbf{H}_0$ a dále logicky odvodíme rozdělení pravděpodobnosti testované veličiny X. Výrok **A** v tomto případě tedy představuje tvrzení, že testovaná veličina má námi odvozené rozdělení a zjistili jsme (naměřili) hodnotu X_{OBS} veličiny X. Za předpokladu, že jsme neudělali logickou chybu, nebo chybu měření platí :

P*($\mathbf{H}_0 \Rightarrow \mathbf{A}$) = 1.

míru pravděpodobnosti, že nastane jev $\mathbf{H}_0 \wedge \mathbf{A}$ vyjadřuje tzv. p_{value}. Pokud platí

$p_{value} \approx$ P($\mathbf{H}_0 \wedge \mathbf{A}$) $\rightarrow 0$ je zřejmé, že P($\mathbf{H}_0$) $\rightarrow 0$.

Příklad 2.1
Chceme statisticky dokázat, že v daném regionu je nedostatek koček (byla porušena ekologická rovnováha). Tzn.

H_0 : V regionu je dostatek koček.

Za testovou veličinu si zvolíme například

X = počet myší v daném regionu

Dejme tomu, že při dostatku koček (tzn. při stavu ekologické rovnováhy) známe rozdělení pravděpodobnosti veličiny X. (např. se střední hodnotou 100 myší v daném regionu).
Pokud však zjistíme hodnotu při daném rozdělení veličiny X hrubě nepravděpodobnou (např. X_{OBS} = 1 000 000 myší v regionu), pak je zřejmé, že předpoklad je také hrubě nepravděpodobný. Proto usuzujeme na to, že v regionu je nedostatek koček. ∎

3 Jednovýběrové testy

3.1 Jednovýběrový t test

Máme-li normálně rozdělenou populaci u které neznáme střední hodnotou μ a rozptylem σ^2, lze použit jednovýběrový t test k ověření předpokladu, že se střední hodnota (populační průměr) μ rovná určité hodnotě μ_0.

	Nulová hypotéza H_0	Alternativní hypotéza H_A	Testové kritérium Tx	p-hodnota
1.1		$\mu < \mu_0$		$F_0(x_{OBS})$
1.2	$\mu = \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$s = \frac{(x-\mu)*\sqrt{n}}{S}$	1- $F_0(x_{OBS})$
1.3		$\mu \neq \mu_0$		$2\min\{F_0(x_{OBS}), 1-F_0(x_{OBS})\}$

Testové kritérium u Jednovýběrového t testu má v případě platnosti nulové hypotézy Studentovo rozdělení s n-1 stupni volnosti

Význam jednotlivých zkratek:
x - průměr vybraných hodnot
s - výběrová směrodatná odchylka
n - velikost výběru

Příklad 3.1
V cementárně pytlovali cement do 25kg pytlů. Bylo náhodně vybráno 10 pytlů a všechny byly převáženy. V tabulce jsou naměřené hodnoty. Ověřte jestli střední hodnota váhy pytlů není menší než 25kg. Předpokládáme normalitu dat.

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
25	25	24	24,4	25	25,1	24,5	24,8	25,8	25,3

$H_0 : \mu = 25$

$x = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{25+25+24+...+25{,}3}{10} = 24,89$

Zjištěný průměr je menší než testovaná hodnota. Alternativní hypotézu tedy volíme ve tvaru $H_A : \mu < 25$

$S = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-x)^2}{n-1} = \frac{(25-24{,}89)^2+(25-24{,}89)^2+(24-24{,}89)^2+...+(25{,}3-24{,}89)^2}{9} = 0,5$

$x_{OBS} = \frac{(x-\mu)*\sqrt{n}}{S} = \frac{(24{,}89-25)*\sqrt{10}}{0{,}5} = -0,695$

H_a je ve tvaru $\mu < \mu_0$, takže p-hodnota je počítá podle vzorce 1.2
p-hodnota = $F_0(x_{OBS})$ = $F_0(-0,695)$ = 0,501

p-hodnota je větší než 0,05. Na základě naměřených dat nemůžeme tvrdit, že střední hodnota hmotnosti pytlů je menší než 25kg. ■

Příklad 3.2
Lékaři prováděli krevní testy 10 mužům. Počty červených krvinek naměřených v jejich krvi jsou zapsány v tabulce. Z dlouhodobých měření odhadujeme, že střední hodnota počtu červených krvinek v jednom mililitru krve je u mužů 5,4 milionu. Ověřte, zda hodnoty testované skupiny mužů odpovídají této hodnotě.

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
5,45	5,4	5,41	5,35	5,51	5,38	5,52	5,42	5,41	5,37

$H_0 : \mu = 5,4$

$x = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{5,45+5,4+5,41+...+5,37}{10} = 5,42$

Zjištěná střední hodnota je větší než testovaná hodnota. Alternativní hypotézu tedy volíme ve tvaru $H_A : \mu < 5,42$

$s = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x)^2}{n-1} = \frac{(5,45-5,42)^2+(5,4-5,42)^2+(5,41-5,42)^2+...+(5,37-5,42)^2}{9} = 0,056$

$x_{OBS} = \frac{(x-\mu)*sqrtn}{S} = \frac{(5,42-5,4)*\sqrt{10}}{0,056} = 1,23$

H_a je ve tvaru $\mu > \mu_0$, takže p-hodnota je počítá podle vzorce 1.1
p-hodnota =1 - $F_0(x_{OBS})$ = 1 - $F_0(1,23)$ = 0,87

p-hodnota je větší než 0,05 a nulovou hypotézu nezamítáme. Průměrná hodnota počtu krvinek u sledované skupiny mužů není statisticky významně vyšší, než byla očekávaná hodnota. ■

```
function [pHodnota] = JednovyberovyTTest()
x=[25, 25, 24, 24.4, 25, 25.1, 24.5, 24.8, 25.8, 25.3];
H0=25;
Ha=2;

w=size(x);
n=w(2);
k=1;
x0=0;
e=1;
s=0;

while k<(n+1)
    x0 = x0 + x(k);
    k=k+1;
end

x0=x0/n;

while e<(n+1)
    s=s+(x(e)-x0)^2;
    e=e+1;
end

s=sqrt(s/(n-1));

Tx = ((x0-H0)/s)*sqrt(n);

if Ha==1
    pHodnota = 1-tcdf(Tx,n-1);
end

if Ha==0
    pHodnota = tcdf(Tx,n-1);
end

if Ha==2
    pHodnota1=1-tcdf(Tx,n-1);
    pHodnota2=tcdf(Tx,n-1);
    pHodnota = 2*min(pHodnota1,pHodnota2);
end
end
```

Výpis 1: Příklad na Jednovýběrový t test spočtený v matlabu

3.2 Wilcoxonův test

Wilcoxonův test je příkladem neparametrického testu

Mějme náhodný výběr X_1 , ..., X_n ze spojitého rozdělení s hustotou f, která je symetrická kolem bodu a. Z toho plyne, že a musí být rovno mediánu $x_{0,5}$. Jednovýběrový Wilcoxonův test je určen k testování hypotézy $x_{0,5} = x_{0,5_0}$ [2]

	Nulová hypotéza H_0	Alternativní hypotéza H_A	Testové kritérium Tx	p-hodnota
2.1		$x_{0,5} < x_{0,5_0}$		$F_0(x_{OBS})$
2.2	$x_{0,5} = x_{0,5_0}$	$x_{0,5} > x_{0,5_0}$	$\frac{s^+ - E(s^+)}{\sqrt{D(s^+)}}$	$1- F_0(x_{OBS})$
2.3		$x_{0,5} \neq x_{0,5_0}$		$2\min\{F_0(x_{OBS}),1-F_0(x_{OBS})\}$

Testové kritérium u Wilcoxonova testu má v případě platnosti nulové hypotézy normované normální rozdělení

Význam jednotlivých zkratek:
s^+ - pozorovaná hodnota testovacího kritéria

Příklad 3.3
Bylo náhodně vybráno 10 řidičů jedoucích z Prahy do Brna. Délka jejich cesty (v minutách) je zaznamenána v následující tabulce. Podle policie trvá cesta polovině řidičů méně než 110 minut. Ověřte jejich tvrzení.

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
100	106	97	121	134	117	124	117	121	148

median = 119
$x_{0,5} = 110$
$y_i = x_i - 110$
$H_0 : x_{0,5} = 110$
$H_A : x_{0,5} > 110$

Od mediánu odečteme jednotlivé hodnoty,

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
-10	-4	-13	11	24	7	14	7	11	38

seřadíme je podle jejich absolutních hodnot a určíme jim pořadí. Pokud je ve výběru více hodnot se stejnou absolutní hodnotou je jim přideleno průměrné pořadí.

y_i	-4	7	7	-10	11	11	-13	14	24	38
x_i	1	2,5	2,5	4	5,5	5,5	7	8	9	10

$s^+ = \sum_{y>0} r_i^+ = 2,5 + 2,5 + 5,5 + 5,5 + 8 + 9 = 43$

$E(s^+) = \frac{1}{4}n(n+1) = \frac{1}{4} * 10 * 11 = 27,5$

$D(s^+) = \frac{1}{24}n(n+1)(2n+1) = \frac{1}{24} * 10 * 11 * 21 = 96,3$

$x_{OBS} = \frac{s^+ - E(s^+)}{\sqrt{D(s^+)}} = \frac{43-27,5}{\sqrt{96,3}} = 1,58$

Alternativní hypotéza je ve tvaru $x_{0,5} > x_{0,5_0}$, takže p-hodnota je počítá podle vzorce 2.2

$$p - hodnota = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{1,58} e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = 0,0571$$

p-hodnota je větší než 0,05, takže nulovou hypotézu nezamítáme. Nemůžeme tak na základě naměřených údajů vyvrátit tvrzení policie. Nicméně hodnoty naznačují, že by medián mohll být i vyšší, než ten udávaný.

■

Příklad 3.4
Žáci běhali při hodinách TV 100m. Vyučující říkal, že obvykle uběhne 100m polovina studentu za méně než 10 sekund. Odpovídají naměřené výsledky jeho dřívějším pozorování?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
9,83	10,2	12,8	9,61	9,7	11,17	8,99	10,3	9,6	10,28	9,54	9,75	10,1

median = 9,83
$x_{0,5} = 10$
$y_i = x_i - 10$
$H_0 : x_{0,5} = 10$
$H_A : x_{0,5} < 10$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
-0,17	0,2	2,8	-0,39	-0,3	1,17	-1,01	0,3	-0,4	0,28	-0,46	-0,25	0,1

hodnoty seřadíme podle jejich absolutních hodnot

y_i	0,1	-0,17	0,2	-0,25	0,28	-0,3	0,3	-0,39	-0,4	-0,46	-1,01	1,17	2,8
x_i	1	2	3	4	5	6,5	6,5	8	9	10	11	12	13

$s^+ = \sum_{y>0} r_i^+ = 1 + 3 + 5 + 6,5 + 12 + 13 = 40,5$

$E(s^+) = \frac{1}{4}n(n+1) = \frac{1}{4} * 13 * 14 = 45,5$

$D(s^+) = \frac{1}{24}n(n+1)(2n+1) = \frac{1}{24} * 13 * 14 * 27 = 204,75$

$x_{OBS} = \frac{s^+ - E(s^+)}{\sqrt{D(s^+)}} = \frac{40{,}5 - 45{,}5}{\sqrt{204{,}75}} = -0,35$

Alternativní hypotéza je ve tvaru $x_{0,5} < x_{0,5_0}$, takže p-hodnota je počítá podle vzorce 2.1

$$p - hodnota = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-0,35} e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = 0,3632$$

Nulovou hypotézu na hladině významnosti menší než 0,3632 nezamítáme. p-hodnota je větší než 0,05. Polovina žáků uběhla trasu za méně než 10 sekund.

■

```
function [pHodnota] = WilcoxonuvTest()
x =[9.83,10.2,12.8,9.61,9.7,11.17,8.99,10.3,9.6,10.28,9.54,9.75,10.1];
H0 = 10;
Ha = 0;

w=size(x);
n=w(2);
k=1;
h=1;
c =[];
a=1;
sPlus=0;

for j=1:n
    x(j)=x(j)-H0;
end

while h<n
    while k<n
        if abs(x(k))>abs(x(k+1))
            y=x(k);
            z=x(k+1);
            x(k)=z;
            x(k+1)=y;
            k=k+1;

        else
            k=k+1;
        end
    end
    k=1;
    h=h+1;
end

while a<(n)
    if abs(x(a))~=abs(x(a+1))
        c(a)=a;
        a=a+1;

    else
        b=a;
        v=1;
        m=0;
        while abs(x(a))==abs(x(a+1))
            v=v+1;
            m=m+a;
            a=a+1;
        end

        for i=b:a
            c(i)=(m+a)/v;
        end
        a=a+1;
    end
    c(n)=a;
end
```

```
for j=1:n
    if x(j)>0
        sPlus = sPlus+c(j);
    end
end

Es=n/4 * (n+1);
Ds=n/24 * (n+1) * (2*n+1);
x0 = (sPlus - Es)/sqrt(Ds);

syms x

if Ha==1
    pHodnota = 1-(1/(sqrt(2*pi))* double(int(exp(-x^2/2),x,-inf,x0)));
end

if Ha==0
    pHodnota = (1/(sqrt(2*pi))* double(int(exp(-x^2/2),x,-inf,x0)));
end

if Ha==2
    pHodnota1 = (1/(sqrt(2*pi))* double(int(exp(-x^2/2),x,-inf,x0)));
    pHodnota2 = 1-(1/(sqrt(2*pi))* double(int(exp(-x^2/2),x,-inf,x0)));
    pHodnota = 2*min(pHodnota1,pHodnota2);
end
end
```

Výpis 2: Příklad na Wilcoxonůvt test spočtený v matlabu

3.3 Test o parametru alternativního rozdělení

Předpokládejme, že v sérii n nezávislých opakování pokusu se nějaký náhodný jev A, který má stálou, ale neznámou pravděpodobnost π, vyskytl X-krát. Počet výskytu jevu A v takovéto skupině n opakování pokusu (náhodnou veličinu X) lze považovat za náhodnou veličinu s binomickým rozdělením. Na základě těchto údajů chceme ověřit předpoklad, že parametr π se rovná určité hodnotě π_0. Neznámou pravděpodobnost odhadujeme výběrovou relativní četností p výskytu jevu A, tzn. podílem X/n. Jde nám o ověření, zda se pozorovaná relativní četnost (p) a předpokládaná pravděpodobnost (π_0) liší statisticky významně nebo zda lze jejich rozdíl přisoudit náhodným vlivům. Pro provedení tohoto testu musíme mít k dispozici výběr o dostatečném rozsahu n. [2]

	Nulová hypotéza H_0	Alternativní hypotéza H_A	Testové kritérium Tx	p-hodnota
3.1		$\pi < \pi_0$		$F_0(x_{OBS})$
3.2	$\pi = \pi_0$	$\pi > \pi_0$	$\frac{(p-\pi_0)\sqrt{n}}{\sqrt{\pi_0(1-\pi_0)}}$	1- $F_0(x_{OBS})$
3.3		$\pi \neq \pi_0$		2min$\{F_0(x_{OBS})$,1-$F_0(x_{OBS})\}$

Testové kritérium u Testu o parametru alternativního rozdělení má v případě platnosti nulové hypotézy normované normální rozdělení

Význam jednotlivých zkratek:
p - relativní četnost
π - pravděpodobnost

Příklad 3.5
Firma vyrábějící automobily tvrdí, že 3% brzd ze součastné typové řady špatně fungují. Přišla proto s novou typovou řadou. Náhodně vybraných 300 kusů otestovali a zjistili, že 17 kusů špatně brzdilo. Ověřte jestli došlo ke zhoršení kvality u nové řady.

n=300
m=17

$p = \frac{m}{n} = \frac{17}{300} = 0,057$

Velikost výběru musí být dostatečná. Minimální velikost spočítáme takto: $n > \frac{9}{p(1-p)} \rightarrow n > 168$
Velikost výběru je dostatečná

$H_0 : \pi = 0,03$
$H_A : \pi > 0,03$

$x_{OBS} = \frac{(p-\pi_0)\sqrt{n}}{\sqrt{\pi_0(1-\pi_0)}} = \frac{(0,057-0,03)\sqrt{300}}{\sqrt{0,03*(1-0,03)}} = 2,74$

Alternativní hypotéza je ve tvaru $\pi > \pi_0$, takže p-hodnota se počítá podle vzorce 3.2

$$p - hodnota = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{2,74} e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = 0,003$$

p-hodnota je menší než 0,05, takže nulovou hypotézu zamítáme. Došlo tedy ke zhoršení kvality. ■

Příklad 3.6
Společnost prodávající kosmetiku oslovila v rámci nové prezentace výrobků na ulici 500 lidí s tím, jestli by neměli zájem zakoupit si balíček kosmetiky. Odhaduje, že zájem bude mít 40% obyvatel. Terénní pracovníci zjistili, že zájem má 220 lidí. Je předpoklad firmy správný?

n=500
m=218

$p = \frac{m}{n} = \frac{220}{500} = 0,44$

Velikost výběru musí být dostatečná. Minimální velikost spočítáme takto: $n > \frac{9}{p(1-p)} \rightarrow n > 37$
Velikost výběru je dostatečná

$H_0 : \pi = 0,4$
$H_A : \pi > 0,4$

$x_{OBS} = \frac{(p-\pi_0)\sqrt{n}}{\sqrt{\pi_0(1-\pi_0)}} = \frac{(0,44-0,4)\sqrt{500}}{\sqrt{0,4*(1-0,4)}} = 1,634$

Alternativní hypotéza je ve tvaru $\pi > \pi_0$, takže p-hodnota se počítá podle vzorce 3.2

$$p - hodnota = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{1,83} e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = 0,034$$

Nulovou hypotézu zamítáme ve prospěch alternativní hypotézy. Zájem bude větší než 40%. ■

```
function [pHodnota] = TestOParametruPi()
m=17;
n=300;
H0 = 0.03;
Ha = 1;

p=m/n;
g=9/(p*(1-p));
if n>g
    Tx=(p-H0)/sqrt(H0*(1-H0))*sqrt(n);

    if Ha==0
        syms x
        pHodnota = 1/sqrt(2*pi) * double(int(exp(-x^2/2),x,-inf,Tx));
    end

    if Ha==1
        syms x
        pHodnota = 1-(1/sqrt(2*pi) * double(int(exp(-x^2/2),x,-inf,Tx)));
    end

    if Ha==2
       pHodnota=2*min(1/sqrt(2*pi) * double(int(exp(-x^2/2),x,-inf,Tx)),1-(1/sqrt(2*
            pi) * double(int(exp(-x^2/2),x,-inf,Tx))));
    end
else
    disp('NEDOSTATEK HODNOT!');
end
end
```

Výpis 3: Příklad na Test o parametru alternativního rozdělení spočtený v matlabu

3.4 Kvantilový test

Kvantilový test umožňuje na základě výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ověřit předpoklad, že se 100p% kvantil x_p rovná určité hodnotě x_{po}. Kvantilový test je test neparametrický (nepředpokládá se určité rozdělení populace). Tento test se používá jako alternativa k jednovýběrovému t testu v případě, kdy není splněn požadavek na normalitu dat.

	Nulová hypotéza H_0	Alternativní hypotéza H_A	Testové kritérium Tx	p-hodnota
4.1		$x_p < x_{p0}$		$F_0(x_{OBS})$
4.2	$x_p = x_{p0}$	$x_p > x_{p0}$	Y	1- $F_0(x_{OBS})$
4.3		$x_p \neq x_{p0}$		2min$\{F_0(x_{OBS})$,1-$F_0(x_{OBS})\}$

Testové kritérium u Kvantilového testu má v případě platnosti nulové hypotézy binomické rozdělení

Význam jednotlivých zkratek:
Y - počet pozorování v náhodném výběru, která jsou menší než hodnota mediánu

Příklad 3.7
Meteorolog měřil v červnu každý den teplotu. Náhodně vybral 12 dní a zapsal si teploty v tyto dny. Když zavolal do Českého hydrometeorologického ústavu tak mu sdělili, že medián teplot v letošním červnu je 22,3°C. Shodují se meteorologova měření s obdrženými údaji o mediánu?

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
19,8	20,3	24,8	20	21,6	25,2	23,6	20,1	26,7	25,8	21,9	20,9

$median = 21,75$
$H_0 : x_{0,5} = 22,3$
$H_A : x_{0,5} < 22,3$

Ve výběru je 6 hodnot menších než medián.
$x_{OBS} = 6$

Alternativní hypotéza je ve tvaru $x_p > x_{p0}$, takže p-hodnota se počítá podle vzorce 4.2

$$p - hodnota = \sum_{k=0}^{6} \binom{12}{k} 0,5^k (1 - 0,5)12 - k = 0,39$$

Nulovou hypotézu nezamítáme. Medián teplot v červnu je 22,3°C ■

```
function [pHodnota] = KvantilovyTest()
x=[19.8, 20.3, 24.8, 20, 21.6, 25.2, 23.6, 20.1, 26.7, 25.8, 21.9, 20.9];
H0=median(x);
p=0.5;
Ha=0;

%pro vyber tvaru alternativni hypotezy zadejte do Ha:
%pro xp < xp0 zadejte 0
%pro xp > xp0 zadejte 1
%pro xp ~ xp0 zadejte 2

w=size(x);
n=w(2);
pHodnota=0;
t=0;

for i=1:n
    if x(i)<H0
        t=t+1;
    end
end

if Ha==1
   pHodnota=binocdf(t,n,p);
end

if Ha==0
   pHodnota=1-binocdf(t,n,p);
end

if Ha==2
    pHodnota1=binocdf(t,n,p);
    pHodnota2=1-binocdf(t,n,p);

    pHodnota=2* min(pHodnota1,pHodnota2);
end

end
```

Výpis 4: Příklad na Kvantilový test spočtený v matlabu

3.5 Test o rozptylu normálního rozdělení

Předpokládejme, že máme normálně rozdělenou populaci se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2 a žádný z parametrů μ, σ^2 neznáme. Na základě výběru X_1,X_2, ...,X_n z dané populace chceme ověřit předpoklad, zda rozptyl populace σ^2 se rovná hodnote σ_0^2. [2]

	Nulová hypotéza H_0	Alternativní hypotéza H_A	Testové kritérium Tx	p-hodnota
5.1		$\sigma^2 < \sigma_0^2$		$F_0(x_{OBS})$
5.2	$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$	$\frac{S^2}{\sigma^2}(n-1)$	1- $F_0(x_{OBS})$
5.3		$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$		2min{$F_0(x_{OBS})$,1-$F_0(x_{OBS})$}

Testové kritérium má v případě platnosti nulové hypotézy chi-kvadrát rozdělení s n-1 stupni volnosti.

Význam jednotlivých písmen:
s^2 - vžběrový rozptyl
σ^2 - rozptyl
n - velikost výběru

Příklad 3.8
Při výrobě závaží je nutné, aby směrodatná odchylka nepřesahovala 2g. V tabulce jsou uvedeny váhy 11 náhodně vybraných závaží. Jsou tato závaží vyhovující?

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
101	98	96	103	102	99	97	100	101	98	93

$H_0 : \sigma^2 = 4$

$x = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{101+98+...+93}{10} = 98,91$

$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-x)^2}{n-1} = \frac{(101-98,91)^2+(98-98,91)^2+...+(93-98,91)^2}{10-1} = 8,49$

$H_a : \sigma^2 > 4$

$x_{OBS} = \frac{s^2}{\sigma^2}(n-1) = \frac{8,49}{4}(11-1) = 21,23$

Alternativní hypotéza je ve tvaru $\sigma^2 > \sigma_0$. P-hodnota je tedy počítá podle vzorce 5.2
$p - hodnota = 1 - F_0(x_{OBS}) = 1 - F_0(21,23) = 0,02$

P-hodnota je menší než 0,05. Nulovou hypotézu tedy zamítáme a můžeme říci, že závaží nejsou vyhovující. ∎

```
function [pHodnota] = TestORozptylu()
x=[101, 98, 96, 103, 102, 99, 97, 100, 101, 98, 93];
H0=4;
Ha=1;

w=size(x);
n=w(2);
k=1;
x0=0;
e=1;
s2=0;

while k<(n+1)
    x0 = x0 + x(k);
    k=k+1;
end

x0=x0/n;

while e<(n+1)
    s2=s2+(x(e)-x0)^2;
    e=e+1;
end

s2=s2/(n-1);
Tx=(s2/H0)*(n-1);

if Ha==0
    pHodnota = chi2cdf(Tx,n-1);
end

if Ha==1
    pHodnota = 1-chi2cdf(Tx,n-1);
end

if Ha==2
    pHodnota1 = chi2cdf(Tx,n-1);
    pHodnota2 = 1-chi2cdf(Tx,n-1);
    pHodnota = 2*min(pHodnota1,pHodnota2);
end
end
```

Výpis 5: Příklad na Test o rozptylu normálního rozdělení spočtený v matlabu

4 Dvouvýběrové testy parametrických hypotéz

4.1 Mannův-Whitneyův test

Mannův-Whitneyuv test je neparametrickým testem o shodě mediánu. Nechť $X_1, X_2, \ldots, X_{n1}$ a $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n2}$ jsou dva nezávislé výběry ze spojitých rozdělení se stejným rozptylem a tvarem. Označení výběru se volí tak, aby platilo $n_1 \geq n_2$. [2]

	Nulová hypotéza H_0	Alternativní hypotéza H_A	Testové kritérium T(X,Y)	p-hodnota
1.1		$x_{0,5} < y_{0,5}$		$F_0(x_{OBS})$
1.2	$x_{0,5} = y_{0,5}$	$x_{0,5} > y_{0,5}$	$\frac{(min(U_1,U_2)-\frac{n_1 n_2}{2})}{\sqrt{\frac{1}{12}n_1 n_2(n_1+n_2+1)}}$	1- $F_0(x_{OBS})$
1.3		$x_{0,5} \neq y_{0,5}$		2min{$F_0(x_{OBS})$,1-$F_0(x_{OBS})$}

Testové kritérium u Mannův-Whitneyova testu má v případě platnosti nulové hypotézy normované normální rozdělení

Příklad 4.1
Stáj Ferrari chtěla při závodech F1 zkrátit čas, který je věnován udržbě formule v boxu. Mechanici proto vyvinuli sadu nového nářadí, které by mělo zrychlit práci mechaniků. V tabulce jsou uvedeny časy s použitím nového a starého nářadí. Změnšuje použití nového nářadí čas strávený v boxu?

Nové nářadí	7,2	5,8	6,3	6,1	7	6,4	6,7	6,5	6,7	6	6,6	7,1	6,2	6,9	6,4
Staré nářadí	6,4	7,3	6,8	6,9	6,6	6,3	6,5	7,3	7,6						

$H_0 : x_{0,5} = y_{0,5}$
$median : x_{0,5} = 6,4$
$median : y_{0,5} = 6,85$
$H_A : x_{0,5} < y_{0,5}$

Srovnáme prvky podle jejich velikosti od nejmenšího po největší a určíme jejich pořadí.

Skupina	x	x	x	x	x	x	y	x	x	y	x	y	x	y	x	x	y	y	x	x	x	y	y	y	y
Nové nářadí	5,8	5,9	6	6,1	6,2	6,3	6,3	6,4	6,4	6,4	6,5	6,5	6,6	6,6	6,7	6,7	6,8	6,9	7	7,1	7,2	7,3	7,3	7,4	7,6
Staré nářadí	1	2	3	4	5	6,5	6,5	9	9	9	11,5	11,5	13,5	13,5	15,5	15,5	17	18	19	20	21	22,5	22,5	24	25

$n_1 = 15$
$n_2 = 10$

Určíme součet pořadí prvního výběru
$T_1 = 155,5$

Určíme součet pořadí druhého výběru
$T_2 = 169,5$

$U_1 = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - T_1 = 114.5$
$U_2 = n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2+1)}{2} - T_2 = 35.5$

Pro ověření správnosti výpočtu lze vypočítat
$U_1 + U_2 = n_1 n_2$

$T(X,Y) = min(U_1, U_2) = 35,5$

Kritická hodnota v tabulce pro Mannův-Whitneyův test je 39. Pozorovaná hodnota testové charakteristiky 35,5 < 39, na hladině významnosti 0,05 zamítáme nulovou hypotézu. Čili nové nářadí má vliv na čas strávený v boxu.

Pro velká n_1, n_2 lze použít

$$T(X,Y) = \frac{(min(U_1, U_2) - \frac{n_1 n_2}{2})}{\sqrt{\frac{1}{12} n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}} = -2,19$$

$p - hodnota = \phi(-2,19) = 0,014$

p-hodnota je menší než 0,05, takže nulovou hypotézu i zde zamítáme. ■

Příklad 4.2
Firma vyrábějící pneumatiky přišla s novou technologií výroby a tvrdí, že pneumatiky vyrobené touto technologií vydrží ujet více km než se kvůli hloubce vzorku stanou nepoužitelnými. V tabulce jsou uvedeny počty ujetých kilometru (v tisících) s pneumatikami vyrobenými novou technologií a starými pneumatikami. Je tvrzení firmy pravdivé?

N. technologie	30	35	29	32	38	25	28	33	34	35	36	30	31	34	35
S. technologie	29	28	36	32	26	33	32	29	31	30					

$H_0 : x_{0,5} = y_{0,5}$
$median : x_{0,5} = 33$
$median : y_{0,5} = 30,5$
$H_A : x_{0,5} > y_{0,5}$

Srovnáme prvky podle jejich velikosti od nejmenšího po největší a určíme jejich pořadí.

Skupina	x	y	x	y	x	y	y	x	x	y	x	y	x	y	y	x	y	x	x	x	x	x	x	y	x
Nová technologie	25	26	28	28	29	29	29	30	30	30	31	31	32	32	32	33	33	34	34	35	35	35	36	36	38
Stará technologie	1	2	3,5	3,5	6	6	6	9	9	9	11,5	11,5	14	14	14	16,5	16,5	18,5	18,5	21	21	21	23,5	23,5	25

$n_1 = 15$
$n_2 = 10$

Určíme součet pořadí prvního výběru
$T_1 = 219$

Určíme součet pořadí druhého výběru
$T_2 = 106$

$U_1 = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - T_1 = 51$
$U_2 = n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2+1)}{2} - T_2 = 99$

Pro ověření správnosti výpočtu lze vypočítat
$U_1 + U_2 = n_1 n_2$

$T(X, Y) = min(U_1, U_2) = 51$

Kritická hodnota v tabulce pro Mannův-Whitneyův test je 39. Pozorovaná hodnota testové charakteristiky $51 > 39$, na hladině významnosti 0,05 nezamítáme nulovou hypotézu, že nová technologie nemá vliv na výdrž pneumatik. ■

```
function  [pHodnota] = MannuvWhitneyuvTest()
a=[30,35,29,32,38,25,28,33,34,35,36,30,31,34,35];
b=[29,28,36,32,26,33,32,29,31,30];
Ha=1;

x=[a,b];
w=size(x);
h=1;
k=1;
n=w(2);
t =[];
g1=size(a);
g1=g1(2);
g2=size(b);
g3=g2(2);
g2=g1+g2(2);
T1=0;T2=0;q=1;

for j=1:g1
    t(j)=1;
end

for l=g1+1:g2
    t(l)=2;
end

while h<n
    while k<n
        if abs(x(k))>abs(x(k+1))
            y=x(k);
            z=x(k+1);
            y1=t(k);
            z1=t(k+1);
            x(k)=z;
            x(k+1)=y;
            t(k)=z1;
            t(k+1)=y1;
            k=k+1;

        else
            k=k+1;
        end
    end
    k=1;
    h=h+1;
end

while q<(n)
    if abs(x(q))~=abs(x(q+1))
        c(q)=q;
        q=q+1;

    else
        e=q;
        v=1;
        m=0;
        while abs(x(q))==abs(x(q+1))
```

```
            v=v+1;
            m=m+q;
            q=q+1;
        end

        for i=e:q
            c(i)=(m+q)/v;
        end
        q=q+1;
    end
    c(n)=q;
end

for j=1:n
    if t(j)==1
        T1=T1+c(j);
    end
end

for j=1:n
    if t(j)==2
        T2=T2+c(j);
    end
end

U1=(g1*(g3)+(g1*(g1+1))/2)-T1;
U2=(g1*(g3)+(g3*(g3+1))/2)-T2;

T=(min(U1,U2)-(g1*g3)/2)/sqrt((1/12)*g1*g3*(g1+g3+1));

if Ha==0
    syms x
    pHodnota = (1/(sqrt(2*pi))* double(int(exp(-x^2/2),x,-inf,T)));
end

if Ha==1
    syms x
    pHodnota = 1-(1/(sqrt(2*pi))* double(int(exp(-x^2/2),x,-inf,T)));
end

if Ha==2
    syms x
    pHodnota1 = (1/(sqrt(2*pi))* double(int(exp(-x^2/2),x,-inf,T)));
    pHodnota2 = 1-(1/(sqrt(2*pi))* double(int(exp(-x^2/2),x,-inf,T)));
    pHodnota=2* min(pHodnota1,pHodnota2);
end
end
```

Výpis 6: Příklad na Mannův-Whitneyův test spočtený v matlabu

4.2 Test homogenity dvou binomických rozdělení

Toto je jedna z nejstarších a stále se velmi často vyskytujících statistických úloh. Nechť p_1 je relativní četnost jevu A při sérii n_1 pokusů. p_2 je relativní četnost jevu B v serii n_2 pokusů. Na základě těchto hodnot chceme testovat nulovou hypotézu $H_0 : p_1 = p_2$ proti alternativní hypotéze H_A

	Nulová hypotéza H_0	Alternativní hypotéza H_A	Testové kritérium T(X,Y)	p-hodnota
2.1		$\pi_1 < \pi_2$		$F_0(x_{OBS})$
2.2	$\pi_1 = \pi_2$	$\pi_1 > \pi_2$	$\frac{(p_1-p_2)(\pi_1-\pi_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1}+\frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}}$	1- $F_0(x_{OBS})$
2.3		$\pi_1 \neq \pi_2$		2min{$F_0(x_{OBS})$,1-$F_0(x_{OBS})$}

Testové kritérium má u Testu homogenity dvou binomických polí v případě platnosti nulové hypotézy normované normální rozdělení

Význam jednotlivých písmen:
p_1 - relativní četnost prvního výběru
p_2 - relativní četnost druhého výběru
n_1 - velikost prvního výběru
n_2 - velikost druhého výběru

Příklad 4.3
Městský úřad v roce 2011 provedl průzkum mezi občany města zda souhlasí se zřízením městské policie. Půzkum provedl ve věkové kategorii 18-30 let a kategorii 30-50 let. V první jmenované kategorii se pro zřízení městské policie vyslovilo 20% z 550 dotazovaných. V kategorii 30-50 let se vyslovilo 70% respondentů pro zřízení městské policie z celkového počtu 750 dotazovaných občanů. Ověřte zda má věk vliv na odpoveď.

Nejdříve spočítáme relativní četnost
$p_{18-30} = \frac{110}{550} = 0,2$

$p_{30-50} = \frac{525}{750} = 0,7$

$H_0 : \pi_{18-30} = \pi_{30-50}$

Jelikož je $p_{30-50} < p_{18-30}$ určíme alternativního hypotézu takto:
$H_A : \pi_{18-30} < \pi_{30-50}$

Ověříme jestli jsou výběry dostatečně velké
$n_1 > \frac{9}{p_{18-30)}(1-p_{18-30})} \Rightarrow n_1 > 43$

$n_2 > \frac{9}{p_{30-50)}(1-p_{30-50})} \Rightarrow n_2 > 57$

V kategorii 18-30 let bylo dotázáno 550 lidí (>43) a v kategorii 30-50 let 750 lidí (>57). Velikost výběru je tedy dostatečná.

$$x_{OBS} = \frac{(p_{18-30} - p_{30-50})(\pi_1 - \pi_{30-50})}{\sqrt{\frac{p_{18-30}(1-p_{18-30})}{n_1} + \frac{p_{30-50}(1-p_{30-50})}{n_2}}} = -20,926$$

Podle tvaru alternativní hypotézy vidíme, že se bude p-hodnota počítat podle vzorce 2.1 $p - hodnota = \Phi(-20,926) \doteq 0$

Na hladině významnosti 0,05 zamítáme nulovou hypotézu. Můžeme tedy říci, že věk má vliv na odpoveď. ■

Příklad 4.4
Firma Magma tvrdí, že má méně vadných počítačových monitorů než firma Frozen. Pro ověření pravdivosti jejich tvrzení bylo náhodně vybráno 120 monitorů, z nichž bylo 10 vadných. Z produkce firmy Frozen bylo náhodně vybráno 90 monitorů, z toho bylo vadných 11 kůsu. Ověřte tvrzení firmy Magma.

U tohoto příkladu postupujeme stejně jako v přechozím přikladu

$p_1 = \frac{10}{120} = 0,093$

$p_2 = \frac{11}{90} = 0,122$

$H_0 : \pi_1 = \pi_2$
$H_A : \pi_1 < \pi_2$

$n_1 > \frac{9}{p_1(1-p_1)} \Rightarrow n_1 > 113$

$n_2 > \frac{9}{p_2(1-p_2)} \Rightarrow n_2 > 84$

$$x_{OBS} = \frac{(p_1 - p_2)(\pi_1 - \pi_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} = -0,9$$

$p - hodnota = \Phi(-0,9) = 0,18$

Na hladině významnosti 0,05 nezamítáme nulovou hypotézu. Nemůžeme říci, že firma Magma má méně vadných monitorů než firma Frozen. ■

```
function [pHodnota] = TestHomogenityBinPoli()
m1=10;
m2=11;
n1=120;
n2=90;
Ha=0;

P1=m1/n1;
P2=m2/n2;

g1=9/(P1*(1-P1));
g2=9/(P2*(1-P2));

if (n1>g1 && n2>g2)

T=((P1-P2)-(0))/(sqrt(P1*(1-P1)/n1 + P2*(1-P2)/n2));

if Ha==0
    syms x
    pHodnota = (1/(sqrt(2*pi))* double(int(exp(-x^2/2),x,-inf,T)));
end

if Ha==1
    syms x
    pHodnota = 1-(1/(sqrt(2*pi))* double(int(exp(-x^2/2),x,-inf,T)));
end

if Ha==2
    syms x
    pHodnota1 = (1/(sqrt(2*pi))* double(int(exp(-x^2/2),x,-inf,T)));
    syms x
    pHodnota2 = 1-(1/(sqrt(2*pi))* double(int(exp(-x^2/2),x,-inf,T)));
    pHodnota=2* min(pHodnota1,pHodnota2);
end
else
    disp('NEDOSTATEK HODNOT!');
end
end
```

Výpis 7: Příklad na Test homogenity binomických rozdělení spočtený v matlabu

4.3 Párové testy

V praxi se však často stává také to, že u každé z n statistických jednotek zjišťujeme hodnoty nějakých dvou spolu souvisejících znaků (např. tlak krve před a po podání určitého léku, ostrost vidění levého a pravého oka, rychlost zavírání dveří automobilu měrena dvěma ruznýma metodama. Výsledkem zjišťování jsou pak dvojice náhodných veličin (X_1, Y_1) , (X_2, Y_2) , . . . , (X_n, Y_n), které tvoří páry závislých pozorování (jde o veličiny zjištované na stejné statistické jednotce). Mužeme chtít ověřit, zda výběry X = (X_1,X_2, . . . , X_n) a Y = (Y_1, Y_2, . . . , Y_n) pocházejí z rozdělení se stejnými středními hodnotami μ_1 a μ_2. [2]

	Nulová hypotéza H_0	Alternativní hypotéza H_A	Testové kritérium T(X,Y)	p-hodnota
3.1		$\mu_1 < \mu_2$		$F_0(x_{OBS})$
3.2	$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 > \mu_2$	$\frac{(d-\mu)\sqrt{n}}{s_D}$	1- $F_0(x_{OBS})$
3.3		$\mu_1 \neq \mu_2$		2min{$F_0(x_{OBS})$,1-$F_0(x_{OBS})$}

Testové kritérium u Párových testů má v případě platnosti nulové hypotézy Studentovo rozdělení s n-1 stupni volnosti

Význam jednotlivých písmen:
d - průmerný rozdíl hodnot

Příklad 4.5
Firma ABCD vyvinula nový lék na hubnutí a nechala ho otestovat na lidech. V tabulce je váha lidí (v kg) před používáním a po pulročním používání přípravku. Účinkuje tento přípravek?

Před užíváním	95	105	78	88	74	102	96
Po užívání	85	110	73	89	70	90	86

$H_0 : \mu = 0$

Vypočítáme rozdíl vah před začátek užívání přípravku a po pulroce používání.

Před užíváním	95	105	78	88	74	102	96
Po užívání	85	110	73	89	70	90	86
Rozdíl	10	-5	5	-1	4	12	10

Nyní spočítáme průmerný rozdíl před a po užívání

$$d = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n} = \frac{10 - 5 + 5 - 1 + 4 + 12 + 10}{7} = 5$$

Námi vypočítaný průměrný rozdíl je větší něž hodnota než testovaná hodnota. Proto volíme alternativní hypotézu ve tvaru:
$H_A : \mu > 0$

$s_D = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i - d)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{(10-5)^2+(-5-5)^2+...+(10-5)^2}{7-1}} = 6,27$

Dopočítáme testovací kritérium
$\text{x}_{OBS} = \frac{(d-\mu)*\sqrt{n}}{sD} = \frac{(5-0)\sqrt{7}}{6,27} = 2,1$

Alternativní hypotéza je ve tvaru p-hodnota má tvaru $H_A : \mu > 0$, takže p hodnota se vypočítá podle vztahu p-hodnota = 1 – $F_0(x_{OBS})$

$F_0(x_{OBS})$ je distribuční funkce Studentova rozdělení s n-1 stupni volnosti

p-hodnota = 1-$F_{2,1}$ = 0,04

p-hodnota je menší než 0,05, takže nulovou hypotézu zamítáme a můžeme tedy říct, že přípravek snižuje hmotnost. ■

Příklad 4.6
Vědci provádejí studii o červených krvinkách a chtějí zjistit jestli pobyt ve vyšších nadmořských výškách ovlivňuje počet červených krvinek u lidí. Změřili proto 7 mužům počet krvinek v 1ml^3 krve před jejich pobytem v horách a poté po půlročním pobytu ve velké nadmořské výšce. Zjistěte jestli je tvrzení vědcu, že při pobytu ve velké nadmořské výšce stoupá počet červených krvinek, pravdivé.

Počet krvinek při malé n.v.	5,4	5,38	5,6	5,35	5,54	5,47	5,5
Počet krvinek při velké n.v.	5,6	5,5	5,68	5,51	5,55	5,47	5,49

$H_0 : \mu = 0$

Vypočítáme rozdíl počtu červených krvinek.

Počet krvinek při malé n.v.	5,4	5,38	5,6	5,35	5,54	5,47	5,5
Počet krvinek při velké n.v.	5,6	5,5	5,68	5,51	5,55	5,47	5,49
Rozdíl	-0,2	-0,12	-0,08	-0,16	-0,01	0	0,01

$d = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n} = \frac{-0,2-0,12+...+0+0,01}{7} = -0,08$

Spočtený průměr je menší než testovaná hodnota, takže alternativní hypotéza bude ve tvaru:
$H_A : \mu < 0$

$sD = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i - d)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{(-0,2-(-0,08))^2+(-0,12-(-0,08))^2+...+(0,01-(-0,08))^2}{7-1}} = 0,08$

Dopočítáme testovací kritérium
$\text{x}_{OBS} = \frac{(d-\mu)*\sqrt{n}}{sD} = \frac{(-0,08-0)\sqrt{7}}{0,08} = -2,54$

Alternativní hypotéza má tvar $H_A : \mu < 0$, takže p-hodnota se spočítá podle vzorce 3.1
p-hodnota = $F_{(-2{,}54)}$ = 0,022

p-hodnota je menší než 0,05, takže nulovou hypotézu zamítáme. Můžeme tedy říct, že pobyt ve vyšší nadmořské výšce má vliv na vyšší počet červených krvinek. ∎

```
function [pHodnota] = ParoveTesty()
x =[5.4,5.38,5.6,5.35,5.54,5.47,5.5];
y =[5.6,5.5,5.68,5.51,5.55,5.47,5.49];
H0=0;
Ha=0;

z =[];
w=size(x);
n=w(2);
d=0;
sD=0;

for j=1:n
    z(j)=x(j)-y(j);
end

for i=1:n
    d=d+z(i);
end
d=d/n;

for m=1:n
    sD= sD + (z(m) - d)^2;
end

sD=sqrt(sD/(n-1));

x0=(d-H0)/sD * sqrt(n);

if Ha==1
    pHodnota = 1-tcdf(x0,n-1);
end

if Ha==0
    pHodnota = tcdf(x0,n-1);
end

if Ha==2
    pHodnota2=0;
    pHodnota1=0;

    pHodnota1 = tcdf(x0,n-1);
    pHodnota2 = 1-tcdf(x0,n-1);

    pHodnota=2* min(pHodnota1,pHodnota2);
end
end
```

Výpis 8: Příklad na Párový test spočtený v matlabu

4.4 Test o shodě dvou rozptylů

Při výběru testu vhodného pro ověření shody dvou středních hodnot hraje důležitou roli, zda jsou rozptyly srovnávaných populací stejné, či nikoliv. Předpoklad o shodě rozptylů lze na základě náhodných výběrů ověřit F-testem. [2]

	Nulová hypotéza H_0	Alternativní hypotéza H_A	Testové kritérium T(X,Y)	p-hodnota
4.1	$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 < \sigma_2^2$	$\frac{(X-Y)-(\mu_x-\mu_y)}{\sqrt{\frac{s_x^2}{n_1}+\frac{s_y^2}{n_2}}}$	$F_0(x_{OBS})$
4.2		$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$		1- $F_0(x_{OBS})$

Testové kritérium u Testu o shodě dvou rozptylů má v případě platnosti nulové hypotézy Fisher-Snedecorovo rozdělení

Význam jednotlivých zkratek:
X,Y = průměry hodnot
s_x^2, s_y^2 - výběrové rozptyly

Příklad 4.7
Bylo vybráno 13 stejných aut. Polovině z nich bylo do benzínu přidáno aditivum snižující spotřebu. Spotřeba je zaznamenána v tabulce. Jsou rozptly stejné? Předpokládáme normalitu dat.

Spotřeba s aditivem	5,9	6,15	5,92	6,07	5,8	5,6	5,5
Spotřeba bez aditivem	6,35	6,5	6,25	6,4	6,32	6,23	

Nejdříve spočítáme průměru jednotlivých výběrů

X = $\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i = \frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7} X_i = 5.85$

Y = $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} Y_i = 6,34$

Průměr hodnot X je menší než Y. Alternativní hypotéza tedy bude $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$

$S_x^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(X_i - X)^2 = 0,055$

$S_y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - Y)^2 = 0,010$

$x_{OBS} = \frac{S_x^2}{S_y^2} = 5.57$

Alternativní hypotéza je ve tvaru $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$, takže p-hodnota se počítá podle 4.1
p-hodnota = $F_0(x_{OBS})$ = 0,04

Nulovou hypotézu zamítáme jelikož p-hodnota < 0,05. Přijmáme alternativní hypotézu o různosti rozptylů. ■

Příklad 4.8
Družstvo kulturistů chtělo otestovat nový přípravek na zvýšení výkonosti při posilovaní. Členové družstva nejdříve měsíc posilovali bez použití přípravku a

na konci měsíce dělalo 10 náhodně vybraných členů kliky. Poté měsíc používali přípravek a na konci dělalo stejných 10 členů kliky. Počty kliků jsou uvedeny v tabulce. Ověřte jestli přípravek funguje.Předpokládáme normalitu dat.

Počet kliků bez přípravku	37	35	38	42	35	38	39	36	40	37
Počet kliků bez přípravku	36	38	35	40	37	36	38	35	38	37

X = $\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{1} 0X_i = 37,7$

Y = $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{1} 0Y_i = 37$

Průměr hodnot X je větší než Y. Alternativní hypotéza tedy bude $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$

$S_x^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(X_i - X)^2 = 4,9$

$S_y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - Y)^2 = 2,44$

$x_{OBS} = \frac{S_x^2}{S_y^2} = 2$

Alternativní hypotéza je ve tvaru $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$, takže p-hodnota se počítá podle 4.2
p-hodnota = F$_0$(x$_{OBS}$) = 0,16

Nulovou hypotézu nezamítáme jelikož p-hodnota $>$ 0,05. Nemůžeme tvrdit, že se rozptyly statisticky významně liší. ∎

```
function [pHodnota] = fTest()
x=[5.9, 6.15, 5.92, 6.07, 5.8, 5.6, 5.5];
y=[6.35, 6.5, 6.25, 6.4, 6.32, 6.23];

z=[];
w1=size(x);
n1=w1(2);
w2=size(y);
n2=w2(2);
x1=0;
y1=0;
s2x=0;
s2y=0;

for i=1:n1
    x1=x1+x(i);
end

for i=1:n2
    y1=y1+y(i);
end

x1=x1*(1/n1);
y1=y1*(1/n2);

for i=1:n1
    s2x=s2x+(x(i)-x1)^2;
end

for i=1:n2
    s2y=s2y+(y(i)-y1)^2;
end

s2x=s2x*(1/(n1-1));
s2y=s2y*(1/(n2-1));

c=(s2x)/(s2y);

if s2x<s2y
    pHodnota = fcdf(c,n1-1,n2-1);
end

if s2x>s2y
    pHodnota = 1-fcdf(c,n1-1,n2-1);
end
end
```

Výpis 9: Příklad na Test o shodě dvou rozptylů spočtený v matlabu

4.5 Douvýběrový T test

Dvouvýběrový T test se používá pro porovnání středních hodnot dvou normálních populací s neznámými, avšak shodnými rozptyly. [1]

	Nulová hypotéza H_0	Alternativní hypotéza H_A	Testové kritérium T(X,Y)	p-hodnota
4.1	$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 < \mu_2$	$\frac{(X-Y)-(\mu_x-\mu_y)}{\sqrt{\frac{(n_1-1)s_x^2+(n_2-1)s_y^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$	$F_0(x_{OBS})$
4.2		$\mu_1 > \mu_2$		1- $F_0(x_{OBS})$
4.3		$\mu_1 \neq \mu_2$		2min$\{F_0(x_{OBS})$,1-$F_0(x_{OBS})\}$

Testové kritérium má v případě platnosti nulové hypotézy Studentovo rozdělení s n_1 + n_2 - 2 stupni volnosti.

Význam jednotlivých zkratek:
X,Y = průměry hodnot
s_x^2, s_y^2 - výběrové rozptyly

Příklad 4.9
Jako příklad dopočítáme příklad 3.8 z kapitoly o shodě dvou rozptylů
Družstvo kulturistů chtělo otestovat nový přípravek na zvýšení výkonosti při posilovaní. Členové družstva nejdříve měsíc posilovali bez použití přípravkua na konci měsíce dělalo 10 náhodně vybraných členů kliky. Poté měsíc používali přípravek a na konci dělalo stejných 10 členů kliky. Počty kliků jsou uvedeny v tabulce. Ověřte jestli přípravek funguje.

Počet kliků bez přípravku	37	35	38	42	35	38	39	36	40	37
Počet kliků bez přípravku	36	38	35	40	37	36	38	35	38	37

Shodu rozptylů jsme ověřili v kapitole o shodě dvou rozptlů.
$H_0 : \mu_1 = \mu_2$
$H_A : \mu_1 < \mu_2$

$$x = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{37+35+...+37}{10} = 37,7$$

$$y = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{36+38+...+37}{10} = 37$$

$$s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-x)^2}{n-1} = \frac{(37-37{,}7)^2+(35-37{,}7)^2+...+(37-37{,}7)^2}{10-1} = 4,9$$

$$s_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-y)^2}{n-1} = \frac{(36-37)^2+(38-37)^2+...+(37-37)^2}{10-1} = 2,44$$

$$x_{OBS} = \frac{(x-y)-(\mu_x-\mu_y)}{\sqrt{\frac{(n_1-1)s_x^2+(n_2-1)s_y^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} = \frac{(37{,}7-37)-(0)}{\sqrt{\frac{(10-1)4{,}9+(10-1)2{,}44}{10+10-2}}\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{10}}} = 0,82$$

Alternativní hypotéza je ve tvaru $\mu_1 < \mu_2$. p-hodnota se bude počítat podle 4.1
p-hodnota = $F_0(x_{OBS}) = F_0(0,82) = 0,78$
Nulovou hypotézu nezamítáme. Nelze tedy říci, že přípravek zvyšuje výkonost. ∎

```
function [pHodnota] = DvouVyberTTest()
x=[37, 35, 38, 42, 35, 38, 39, 36, 40, 37];
y=[36, 38, 35, 40, 37, 36, 38, 35, 38, 37];

Ha=0;

z=[];
w1=size(x);
n1=w1(2);
w2=size(y);
n2=w2(2);
x1=0;
y1=0;
s2x=0;
s2y=0;

for i=1:n1
    x1=x1+x(i);
end

for i=1:n2
    y1=y1+y(i);
end

x1=x1*(1/n1);
y1=y1*(1/n2);

for i=1:n1
    s2x=s2x+(x(i)-x1)^2;
end

for i=1:n2
    s2y=s2y+(y(i)-y1)^2;
end

s2x=s2x*(1/(n1-1));
s2y=s2y*(1/(n2-1));

c=(s2x)/(s2y);

Txy=(x1-y1)/(sqrt(((n1-1)*s2x + (n2-1)*s2y)/(n1+n2-2))*sqrt(1/n1 + 1/n2));

if Ha==0
    pHodnota = tcdf(Txy,n1+n2-2);
end

if Ha==1
    pHodnota = 1-tcdf(Txy,n1+n2-2);
end
end
```

Výpis 10: Příklad na Dvouvýběrový t test spočtený v matlabu

4.6 Aspinové-Welchův test

V případě, že rozptyly normálně rozdělených populací neznáme a nemužeme předpokládat, že jsou shodné lze použít pro ověření shody středních hodnot například Aspinové-Welchův test [1]

	Nulová hypotéza H_0	Alternativní hypotéza H_A	Testové kritérium T(X,Y)	p-hodnota
5.1	$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 < \mu_2$	$\frac{(X-Y)-(\mu_x-\mu_y)}{\sqrt{\frac{s_x^2}{n_1}+\frac{s_y^2}{n_2}}}$	$F_0(x_{OBS})$
5.2		$\mu_1 > \mu_2$		1- $F_0(x_{OBS})$
5.3		$\mu_1 \neq \mu_2$		2min{$F_0(x_{OBS})$,1-$F_0(x_{OBS})$}

Testové kritérium má v případě platnosti nulové hypotézy Studentovo rozdělení s v stupni volnosti. Význam jednotlivých zkratek:
X,Y = průměry hodnot
s_x^2, s_y^2 - výběrové rozptyly

Příklad 4.10
Jako příklad dopočítáme příklad 3.7 z kapitoly o shodě dvou rozptylů
Bylo vybráno 13 stejných aut. Polovině z nich bylo do benzínu přidáno aditivum snižující spotřebu. Spotřeba je zaznamenána v tabulce. Pomáhá aditivum zmenšit spotřebu? Předpokládáme normalitu dat.

Spotřeba s aditivem	5,9	6,15	5,92	6,07	5,8	5,6	5,5
Spotřeba bez aditivem	6,35	6,5	6,25	6,4	6,32	6,23	

Různost rozptylů jsme ověřili v kapitole o shodě dvou rozptlů.
$H_0 : \mu_1 = \mu_2$
$H_A : \mu_1 < \mu_2$

Spočítáme půrměry jednotlivých výběrů
$x = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{5{,}9+6{,}15+...+5{,}5}{7} = 5,85$

$y = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{6{,}35+6{,}5+...+6{,}23}{6} = 6,34$

Teď spočítáme jednotlivé výběrové rozptyly

$s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-x)^2}{n-1} = \frac{(5{,}9-5{,}85)^2+(6{,}15-5{,}85)^2+...+(5{,}5-5{,}85)^2}{7-1} = 0,055$

$s_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-y)^2}{n-1} = \frac{(6{,}35-6{,}34)^2+(6{,}5-6{,}34)^2+...+(6{,}23-6{,}34)^2}{6-1} = 0,01$

a nakonec spočteme počet stupňů volnosti

v=$\frac{(\frac{s_x^2}{n_1}+\frac{s_y^2}{n_2})^2}{\frac{s_x^4}{n_1^2(n_1-1)}+\frac{s_y^4}{n_2^2(n_2-1)}} = \frac{(\frac{0{,}055^2}{7}+\frac{0{,}01^2}{6})^2}{\frac{0{,}055^4}{7^2(7-1)}+\frac{0{,}01^4}{6^2(6-1)}} = 8,36$

Stupně volnosti je nutné zaokrouhlit na celé číslo, takže v=8

$x_{OBS} = \frac{(x-y)-(\mu_x-\mu_y)}{\sqrt{\frac{s_x^2}{n_1}+\frac{s_y^2}{n_2}}} = \frac{(5{,}85-6{,}34)-(0)}{\sqrt{\frac{0{,}055}{7}+\frac{0{,}01}{6}}} = -5,03$

Alternativní hypotéza je ve tvaru $\mu_1 < \mu_2$. p-hodnota se počítá podle 5.1
p-hodnota = $F_0(x_{OBS}) = F_0(-5,03) \doteq 0$

Na hladině významnosti 95% zamítáme nulovou hypotézu. Aditivum tedy snižuje spotřebu. ■

```
function [pHodnota] = AspinoveWelchuv()
x=[5.9, 6.15, 5.92, 6.07, 5.8, 5.6, 5.5];
y=[6.35, 6.5, 6.25, 6.4, 6.32, 6.23];

w1=size(x);
n1=w1(2);
w2=size(y);
n2=w2(2);
x1=0;
y1=0;
s2x=0;
s2y=0;

for i=1:n1
    x1=x1+x(i);
end

for i=1:n2
    y1=y1+y(i);
end

x1=x1*(1/n1);
y1=y1*(1/n2);

for i=1:n1
    s2x=s2x+(x(i)-x1)^2;
end

for i=1:n2
    s2y=s2y+(y(i)-y1)^2;
end

s2x=s2x*(1/(n1-1));
s2y=s2y*(1/(n2-1));

v=(s2x/n1 + s2y/n2)^2/(s2x^2/(n1^2*(n1-1)) + s2y^2/(n2^2*(n2-1)));
v=round(v);
xOBS = (x1-y1)/(sqrt(s2x/n1 + s2y/n2));

if x1<y1
    pHodnota = tcdf(xOBS,v);
end

if x1>y1
    pHodnota = 1-tcdf(xOBS,v);
end
end
```

Výpis 11: Příklad na Aspinové-Welchův test spočtený v matlabu

5 Testy dobré shody

5.1 χ^2 test dobré shody s očekávaným rozdělením

Tento test se používá v případě že chceme ověřit jesti má výběr rozdělení určitého typu. Při použití tohoto testu musí být splněna podmínka, že všechny očekávané četnosti E_i jsou větší než 5

	Nulová hypotéza H_0	Alternativní hypotéza H_A	Testové kritérium T(X,Y)	p-hodnota
5.1	Teoretické a empirické rozdělení se shoduje	Teoretické a empirické rozdělení se neshoduje	$\sum_{i=1}^{k}(O_i - E_i)^2$	1- $F_0(x_{OBS})$

Testové kritérium má v případě platnosti nulové hypotézy χ^2 rozdělení s k-1 stupni volnosti
Význam jednotlivých zkratek:
O_i - pozorované četnosti
E_o - očekávané četnosti

Příklad 5.1
V loňském roce se v ČR prodalo 173 280 automobilů. Podle údajů v tabulce rozhodněte jestli se automobily prodávají během roku rovnoměrně.

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
14501	14425	14007	14720	14627	14603	14529	14500	14706

10	**11**	**12**
14440	14382	14604

Nejdříve zaznamenáme do tabulky pozorované četnosti O_i a očekávané četnosti E_1

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
$\mathbf{O}_i$	14501	14425	14007	14720	14627	14603	14529	14500	14706
$\mathbf{E}_i$	14440	14440	14440	14440	14440	14440	14440	14440	14440

10	**11**	**12**
14440	14382	14604
14440	14440	14440

Předpokladem pro použití χ^2 testu dobré shody je, aby očekávané četnosti byly větší než 5. Tento předpoklad je splněn.

$$x_{OBS} = \frac{\sum_{i=1}^{12}(O_i - E_i)^2}{E_i} = \frac{(14501-14440)^2}{14440} + ... + \frac{(14706-14440)^2}{14440} = 30,74$$

Počet stupňů volnosti je v našem případě 12 - 1 = 11

p-hodnota = 1 - F_0(30,74) = 0,001

Nulovou hypotézu můžeme zamítnout. Počet prodaných automobilů během roku není rovnoměrný. ■

```
function [pHodnota] = chi2DobreShody()
x=[14501, 14425, 14007, 14720, 14627, 14603, 14529, 14500, 14706, 14440, 14382,
    14604];
y=[14440, 14440, 14440, 14440, 14440, 14440, 14440, 14440, 14440, 14440, 14440,
    14440];
m=173280;

w=size(x);
n=w(2);
xOBS = 0;

for i=1:n
   xOBS = xOBS+(x(i)-y(i))^2/y(i);
end

pHodnota = 1-chi2cdf(xOBS,n-1);
end
```

Výpis 12: Příklad na χ^2 test dobré shody spočtený v matlabu

6 Závěr

Během práce jsem narazil na několik problémů u Testů dobré shody. Při jejich programování v Matlabu se mi nepodařilo vyřešit efektivní způsob zadávání hodnot a rozdělení. Vyřešení těchto problémů by si podle mého odhadu vyžadovalo několik dní. Ostatní testy šly naprogramovat bez větších problémů. Podařilo se mi vypracovat všechny jednovýběrové a dvouvýběrové testy a uvést ke každému alespoň jeden příklad. Pro zpracování vícevýběrových testů bych potřeboval několik týdnů navíc.
Z jednovýběrových testů mam naprogramované tyto testy: Jednovýběrový t test, Wilcoxonův test, Test o parametru Π alternativního rozdělení, Kvantilový test a Test o rozptylu normálního rozdělení
Z dvouvýběrových jsou to tyto testy: Mannův-Whitneyův test, Test homogenity dvou binomických rozdělení, Párové testy, Test o shodě dvou rozptylů, Dvouvýběrový t test a Aspinové-Welchův test.

Pavel Kuzma

7 Reference

[1] ANDĚL, Jiří. Statistické metody. 2. přeprac. vyd. Praha: Matfyzpress, 274 s. ISBN 80-858-6327-8.

[2] LITSCHMANNOVÁ, Martina. Úvod do statistiky [online]. 2011 [cit. 2013-04-29]. Dostupné z: http://mi21.vsb.cz/modul/uvod-do-statistiky

[3] CYHELSKÝ, Lubomír. Elementární statistická analýza. 1. vyd. Praha: Management Press, 1996, 303 s. ISBN 80-859-4318-2.

[4] LITSCHMANNOVÁ, Martina. Vybrané kapitoly z pravděpodobnosti [online]. 2011 [cit. 2013-04-29]. Dostupné z: http://mi21.vsb.cz/modul/vybrane-kapitoly-z-pravdepodobnosti

[5] ANDĚL, Jiří. Základy matematické statistiky. Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta, Preprint

A Tabulka pro Mannův-Whitneyův test

$\alpha = 0,05$	n																
m	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
4	-	-	0														
5	-	0	1	2													
6	-	1	2	3	5												
7	-	1	3	5	6	8											
8	0	2	4	6	8	10	13										
9	0	2	4	7	10	12	15	17									
10	0	3	5	8	11	14	17	20	23								
11	0	3	6	9	13	16	19	23	26	30							
12	1	4	7	11	14	18	22	26	29	33	37						
13	1	4	8	12	16	20	24	28	33	37	41	45					
14	1	5	9	13	17	22	26	31	36	40	45	50	55				
15	1	5	10	14	19	24	29	34	39	44	49	54	59	64			
16	1	6	11	15	21	26	31	37	42	47	53	59	64	70	75		
17	2	6	11	17	22	28	34	39	45	51	57	63	69	75	81	87	
18	2	7	12	18	24	30	36	42	48	55	61	67	74	80	86	93	99
19	2	7	13	19	25	32	38	45	52	58	65	72	78	85	92	99	106
20	2	8	14	20	27	34	41	48	55	62	69	76	83	90	98	105	112
21	2	8	15	22	29	36	43	50	58	65	73	80	88	96	103	111	119
22	3	9	16	23	30	38	45	53	61	69	77	85	93	101	109	117	125
23	3	9	17	24	32	40	48	56	64	73	81	89	98	106	115	123	132
24	3	10	17	25	33	42	50	59	67	76	85	94	102	111	120	129	138
25	3	10	18	27	35	44	53	62	71	80	89	98	107	117	126	135	145
26	4	11	19	28	37	46	55	64	74	83	93	102	112	122	132	141	151
27	4	11	20	29	38	48	57	67	77	87	97	107	117	127	137	147	158
28	4	12	21	30	40	50	60	70	80	90	101	111	122	132	143	154	164
29	4	13	22	32	42	52	62	73	83	94	105	116	127	138	149	160	171
30	5	13	23	33	43	54	65	76	87	98	109	120	131	143	154	166	177